



TITLE:

# 巡回格子型フィルタによる信号処理(Mathematical Theory of Control and Systems)

AUTHOR(S):

酒井, 英昭

---

CITATION:

酒井, 英昭. 巡回格子型フィルタによる信号処理(Mathematical Theory of Control and Systems). 数理解析研究所講究録 1984, 528: 194-202

ISSUE DATE:

1984-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98551>

RIGHT:

## 巡回格子型フィルタによる信号処理

京大・工

酒井 英昭 (Hideaki Sakai)

## §1. まえがき

板倉らによる PARCOR 音声分析合成法[1]の導入以来、ラティス(格子)型フィルタによる信号処理の研究が盛んに行われている[2]。従来、この種の研究は AR モデルに対するものが主であったが、最近、Lee らにより ARMA モデルへの拡張が提案された[3]。これは、スカラー ARMA 過程を退化した二変数 AR 過程とみなし、多変数ラティス型アルゴリズム[4]に、ARMA 過程であることにより生じる制約を組み込むことにより得られた。

一方、筆者は多変数 AR 過程に対する巡回型ラティス (Circular lattice) アルゴリズム[5][6]を提案してきた。これは[4]のアルゴリズムと違い、すべてスカラー演算のみから成るため実装化が容易である。そこで、本文ではこれを上記の ARMA モデリングに適用し、PARCOR 分析合成系

に類似したARMA分析合成系を導出する。その結果、乗算回数(割り算を含む)が[3]のアルゴリズムの約60%ですむ手法が得られた。

## §2. 巡回格子型アルゴリズム

$d$ 変数過程 $\{X_t\}$ に対し、スカラー過程 $\{Y_t\}$ を

$$Y_{k+(t-1)d} = (X_t) \text{の第} k \text{要素} \quad (1)$$

により生成する。 $\{Y_n\}$ に対し線形予測の手法を適用する。即ち、 $k$ チャンネル  $j$ 次前向き、後向き予測誤差を次式で定義する。

$$\varepsilon_{k,n}^j = Y_{k+nd} + \sum_{i=1}^j \alpha_k^j(i) Y_{k+nd-i} \quad (2)$$

$$\eta_{k,n}^j = Y_{k+nd-j} + \sum_{i=1}^j \beta_k^j(j+1-i) Y_{k+nd-i+1} \quad (3)$$

二乗平均が最小となるよう予測係数を決めると次の関係が得られる。

$$\varepsilon_{k,n}^{j+1} = \varepsilon_{k,n}^j + \alpha_k^{j+1} \eta_{k+1,n}^j \quad (4)$$

$$\eta_{k,n}^{j+1} = \eta_{k+1,n}^j + \beta_k^{j+1} \varepsilon_{k,n}^j \quad (5)$$

ここで、 $\alpha_k^{j+1} \triangleq \alpha_k^{j+1}(j+1)$ 、 $\beta_k^{j+1} \triangleq \beta_k^{j+1}(j+1)$  は PARCOR 係数で

$$\alpha_k^{j+1} = - \frac{E[\varepsilon_{k,n}^j \eta_{k+1,n}^j]}{E[(\eta_{k+1,n}^j)^2]}, \quad \beta_k^{j+1} = - \frac{E[\varepsilon_{k,n}^j \eta_{k+1,n}^j]}{E[(\varepsilon_{k,n}^j)^2]} \quad (6)$$

であり、 $\eta_{0,n}^j = \eta_{d,n-1}^j$  とする。(4),(5)が巡回格子型構造で

ある(図1)。(6)のPARCOR係数をデータ $\{X_1, \dots, X_t\}$ から逐次的に推定する最小二乗アルゴリズムは[6]で導出されている。

### 3.3. ARMA分析合成系

次のARMAモデルを考える。

$$x_t + a_1 x_{t-1} + \dots + a_N x_{t-N} = u_t + b_1 u_{t-1} + \dots + b_N u_{t-N} \quad (7)$$

白色雑音の入力 $u_t$ と観測出力 $x_t$ をまとめて

$$X_t = (u_t \ x_t)' \quad (8)$$

とする。この $\{X_t\}$ に対し巡回格子の考えを適用する。なぜなら(8)の $X_t$ は退化した二変数AR過程だからである[3]。 $\{u_t\}$ が白色であるので、(6)から直ちに

$$\alpha_1^{j+1} = \beta_1^{j+1} = 0 \quad (j=0, 1, \dots) \quad (9)$$

である。更に、次も言える。

$$\alpha_2^1 = - \frac{E[\varepsilon_{2n}^0 \eta_{1,n}^0]}{E[(\eta_{1,n}^0)^2]} = - \frac{E[x_n u_n]}{E[u_n^2]} = -1 \quad (10)$$

(9), (10)がARMA過程であることにより生じる制約であり、これを[6]のアルゴリズムに組み込む。しかし、[6]のアルゴリズムをそのまま使うには、時点 $t$ で $(u_t, x_t)'$ が知られていなくてはならないが、 $u_t$ は観測できない量なので、こ

これは不可能である。そこで、まず  $u_t$  の推定値  $\hat{u}_t$  を作ることを考える。 $u_t$  は  $x_t$  を  $\{x_{t-1}, u_{t-1}, \dots, x_{t-N}, u_{t-N}\}$  が張る空間  $\mathcal{Y}_{1,1,2N}$  に直交射影したときの誤差と考えられる。ところで、 $\mathcal{Y}_{1,1,2N}$  の直交基底は  $\{\eta_{2,t-1}^0, \dots, \eta_{2,t-1}^{2N-1}\}$  であることが示されている [5]。従って、 $u_t$  は

$$\varepsilon_{*,t}^{2N} = x_t + \gamma^1 \eta_{2,t-1}^0 + \dots + \gamma^{2N} \eta_{2,t-1}^{2N-1} \quad (11)$$

で与えられる。(11)の右辺の部分和を

$$\varepsilon_{*,t}^{\delta} = x_t + \gamma^1 \eta_{2,t-1}^0 + \dots + \gamma^{\delta} \eta_{2,t-1}^{\delta-1} \quad (12)$$

とおくと、 $\gamma^{\delta}$  は

$$\gamma^{\delta} = -E[\varepsilon_{*,t}^{\delta-1} \eta_{2,t-1}^{\delta-1}] / E[(\eta_{2,t-1}^{\delta-1})^2] \quad (13)$$

で与えられる。データから  $\gamma^{\delta}$  を逐次推定するにはジョイント・フォロース巡回格子最尤二乗型アルゴリズム [6] を使えばよい。ここで、空間  $\mathcal{Y}_{2,1,n}$ ,  $\mathcal{Y}_{1,1,n-1}$  を

$$\mathcal{Y}_{2,1,n} = \mathcal{L}(\underbrace{u_t, x_{t-1}, \dots}_{n \text{ 個}}), \quad \mathcal{Y}_{1,1,n} = \mathcal{L}(\underbrace{x_{t-1}, u_{t-1}, \dots}_{(n-1) \text{ 個}}) \quad (14)$$

で定義すると

$$\mathcal{Y}_{2,1,n} = \mathcal{Y}_{1,1,n} \oplus u_t \quad (15)$$

であり、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2,t}^n &= x_t - E[x_t | \mathcal{Y}_{2,1,n}] = x_t - E[x_t | \mathcal{Y}_{1,1,n} \oplus u_t] \\ &= x_t - E[x_t | \mathcal{Y}_{1,1,n}] - E[x_t | u_t] = \varepsilon_{*,t}^{n-1} - u_t \end{aligned} \quad (15)$$

となる。従って

$$\alpha_2^{n+2} = - \frac{E[\varepsilon_{2,t}^n \eta_{1,t}^n]}{E[(\eta_{1,t}^n)^2]} = - \frac{E[(\varepsilon_{*t}^{n+1} - u_t) \eta_{2,t+1}^{n+1}]}{E[(\eta_{2,t+1}^{n+1})^2]} = \gamma^n \quad (17)$$

の関係が言える。(16), (17)もARMA過程であることによる制約であるので, これもアルゴリズム4に組み込む。ARMA分析アルゴリズム4は次の二段階から成る。

(I) ジョイント・プロセス巡回格子アルゴリズムにより, 時点 $t$ での $\gamma_t^n$ を推定し,  $\varepsilon_{*t}^{2n}$ を $u_t$ の推定値 $\hat{u}_t$ とする。

(II) この $\hat{u}_t$ をフィードバックして巡回格子の第一チャンネルの入力とし,  $(\hat{u}_t, x_t)'$ を用いて $\beta_{2,t}^{n+1}$ の時間更新を行う。この際,  $\alpha_{2,t}^{n+1}$ は(17)により $\gamma_t^n$ で代用する。また, (9), (10), (16)の拘束もアルゴリズム4に組み込む。

具体的には ( $T=1, 2, \dots$  に対し)

$$(I) \quad \varepsilon_{*,T}^0 = x_T, \quad \cos^2 \theta_{*,1,0,T} = 1$$

次数更新 ( $j=1, 2, \dots, 2N$ )

$$\Delta_{*,T}^j = \lambda \Delta_{*,T-1}^j + \varepsilon_{*,T}^{j-1} \eta_{2,T-1}^{j-1} / \cos^2 \theta_{*,1,j-1,T}$$

$$\tau_{*,T-1}^{j-1} = \lambda \tau_{*,T-2}^{j-1} + (\eta_{2,T-1}^{j-1})^2 / \cos^2 \theta_{*,1,j-1,T}$$

$$\gamma_T^j = -\Delta_{*,T}^j / \tau_{*,T-1}^{j-1}$$

$$\varepsilon_{*,T}^j = \varepsilon_{*,T}^{j-1} + \gamma_T^j \eta_{2,T-1}^{j-1}$$

$$\eta_{1,T}^j = \eta_{2,T-1}^{j-1}$$

$$\cos^2 \theta_{*,1,j,T} = \cos^2 \theta_{*,1,j-1,T} - (\eta_{2,T-1}^{j-1})^2 / \tau_{*,T-1}^{j-1}$$

$$(II) \quad \hat{u}_T = \varepsilon_{*,T}^{2N}$$

$$\eta_{1,T}^0 = \hat{u}_T, \quad \varepsilon_{2,T}^0 = \eta_{2,T}^0 = x_T$$

$$\cos^2 \theta_{2,1,0,T} = 1, \quad \delta_T^0 = -1$$

$$\tau_{1,T-1}^0 = \lambda \tau_{1,T-2}^0 + (\eta_{1,T}^0)^2, \quad \mu = (\eta_{1,T}^0)^2 / \tau_{1,T-1}^0$$

次数更新 ( $j=1, 2, \dots, 2N+1$ )

$$\Delta_{2,T}^j = \lambda \Delta_{2,T-1}^j + (\varepsilon_{2,T}^{j-1} \eta_{1,T}^{j-1}) / \cos^2 \theta_{2,1,j-1,T}$$

$$\sigma_{2,T}^{j-1} = \lambda \sigma_{2,T-1}^{j-1} + (\varepsilon_{2,T}^{j-1})^2 / \cos^2 \theta_{2,1,j-1,T}$$

$$\alpha_{2,T}^j = \delta_T^j$$

$$\beta_{2,T}^j = -\Delta_{2,T}^j / \sigma_{2,T}^{j-1}$$

$$\varepsilon_{2,T}^j = \varepsilon_{*,T}^{j-1} - \hat{u}_T$$

$$\eta_{2,T}^j = \eta_{1,T}^{j-1} + \beta_{2,T}^j \varepsilon_{2,T}^{j-1}$$

$$\cos^2 \theta_{2,1,j,T} = \cos^2 \theta_{*,1,j,T} - \mu$$

となる。図2にこのアルゴリズムのブロック図を示す。図3は合成系で、入力  $u_t$  を与えて、出力  $x_t$  を発生するフィルタのブロック図である。このフィルタの安定条件は  $0 \leq \alpha_2^j$ 、 $\beta_2^j < 1$  であることである。このフィルタのタップ数は  $4N-1$  個であり、Gray, Markel の格子-はしご型フィルタ[7]のそれ ( $3N$  個) に比べ多い。しかし、[7]のフィルタ構造に基づく分析系は知られていない。音声信号処理等の分野では、分析系・合成系を同一のフィルタ構造で考える必要

があるので，本文で提案した ARMA 分析・合成系の方が有効である。表 1 には，本アルゴリズムと [3] のアルゴリズムの 1 サンプル当りの計算量を比較した結果を示す。乗算数が約 40% 減少している。図 4 には，本アルゴリズムを用いて，ARMA 係数を推定した際の 50 回平均の軌道の様子を示す。

#### §4 あとがき

本文では，巡回格子型 フィルタを用いた ARMA モデリングの一手法について述べた。今後の課題としては，このアルゴリズムの収束特性の研究が残されている。

#### 参考文献

- [1] F. Itakura and S. Saito : Proc. 7th Int. Cong. Acoust., Budapest, pp.261-264, 1971.
- [2] 酒井 : システムと制御 (解説), 26巻, 747-755頁, 昭和57年.
- [3] D.T.L. Lee et al. : IEEE Trans. Automat. Contr., AC-27, pp.753-764, 1982.
- [4] ———, : IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, ASSP-29, pp.627-641, 1981.
- [5] H. Sakai : ibid, ASSP-30, pp.279-287, 1982.
- [6] T. Kawase et al. : ibid, ASSP-31, pp.228-231, 1983.
- [7] A.H.Gray and J.D. Markel : IEEE Trans. Audio Electroacoust., AU-21, pp.491-500, 1973.



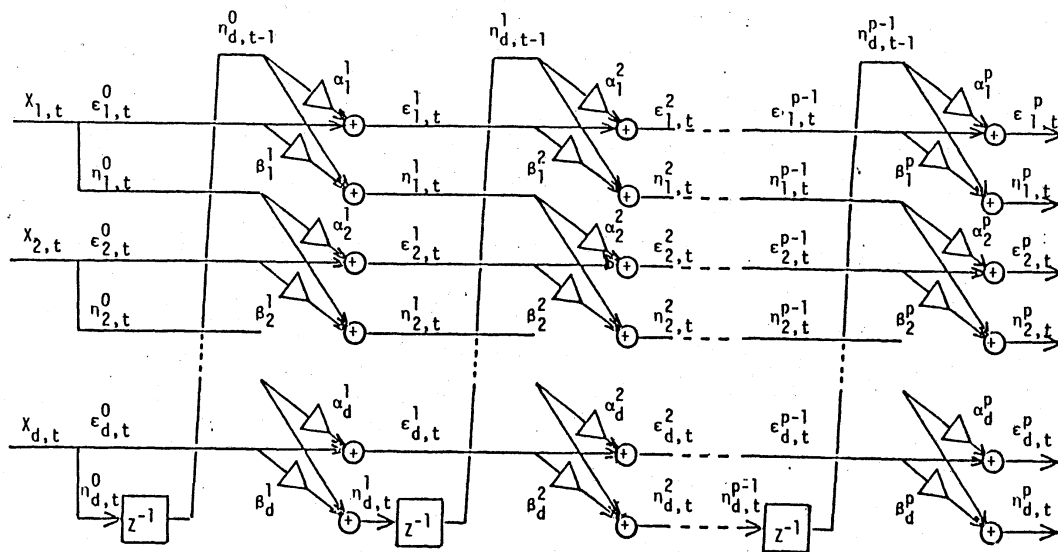


図1. 巡回格子型フィルタ

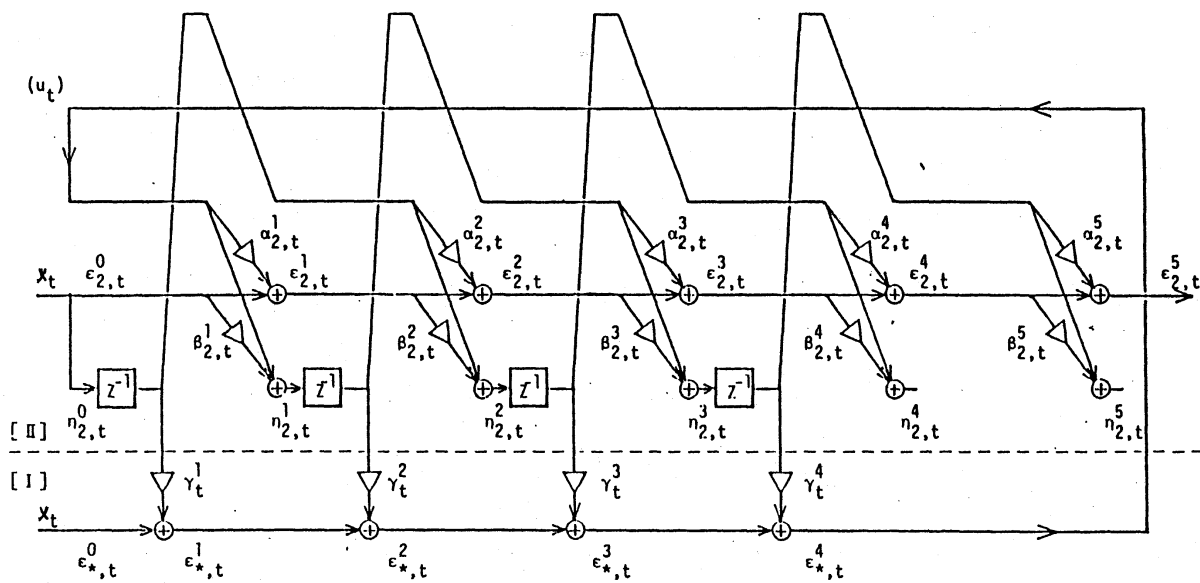


図2. ARMA 分析アルゴリズム

[I]  $u_t$  の推定値  $\hat{u}_t$  を作る

[II] PARCOR 係数  $\beta_2^i$  の計算部分

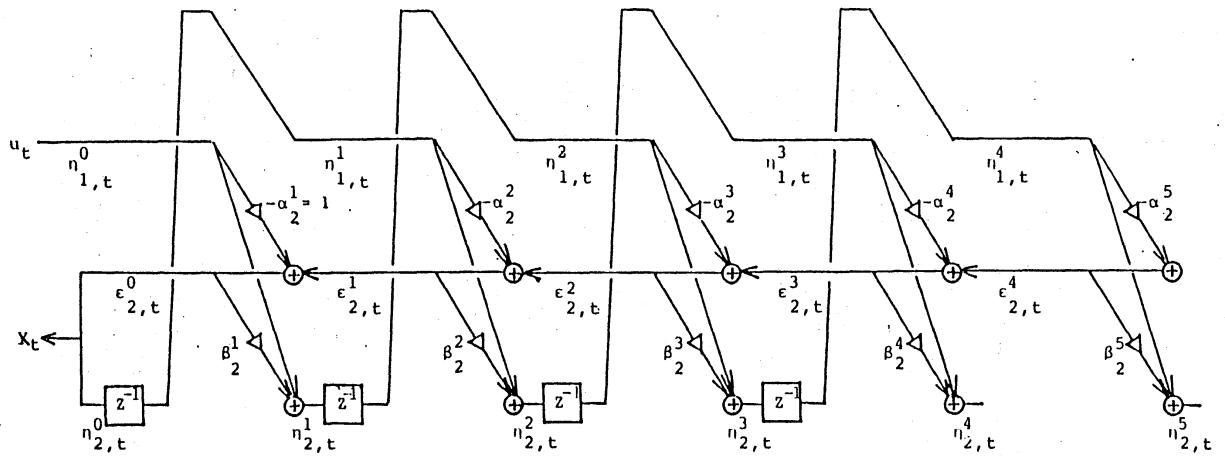


図3. ARMA 合成系

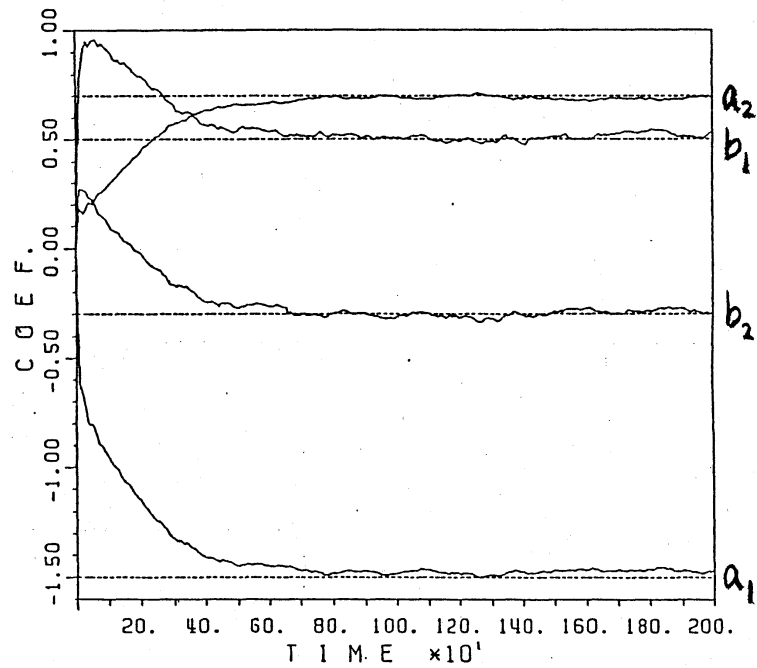


図4 ARMA パラメータの推定値の軌道

	LSCL	LSL [3]
Multiplications (including divisions)	$28N + 9$	$46N$
Additions (including subtractions)	$18N + 6$	$20N$

表 1

計算量の比較